<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23.05.2014 г. – <u>ВАРИАНТ 1</u>

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

1. Кой от изразите приема стойност, която е естествено число?

А) $\frac{17}{21}+\frac{12}{42}$ **Б)** $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{8}}$ **В)** $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ **Г)** $-\frac{11}{12}-\frac{1}{12}$

2. При $x\neq\pm y$ **изразът** $\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}-2$ **е тъждествено равен на:**

А) $\frac{4x^2}{x^2-y^2}$ **Б)** $\frac{4y^2}{x^2-y^2}$ **В)** $\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{x^2-y^2}$ **Г)** 0

3. Всички допустими стойности на израза $\sqrt{\frac{1}{4-x}}+\sqrt{x+2}$ **са**:

А) $x\in(-2;4)$ **Б)** $x\in[-2;4]$ **В)** $x\in[-2;4)$ **Г)** $x\in(-2;4]$

4. Кое от посочените числа НЕ е решение на неравенството $x^2-2x-3\geq 0$**?**

А) $-\sqrt{2}$ **Б)** $\sqrt{2}$ **В)** 3 **Г)** π

5. Ако $\log_{81} a=-\frac{1}{4}$, **то стойността на числото** a **е:**

А) $\frac{1}{81^4}$ **Б)** $\frac{1}{3}$ **В)** 3 **Г)** 81^4

6. Решенията на системата уравнения $\begin{vmatrix} x+y=2 \\ 2x^2+6y=8 \end{vmatrix}$ **са:**

А) $(1;1)$, $(-2;4)$ **Б)** $(1;1)$, $(2;0)$

В) $(-1;3)$, $(2;0)$ **Г)** $(-1;3)$, $(-2;4)$

7. Кое от квадратните уравнения има два реални положителни корена?

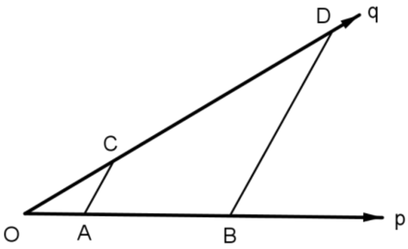
А) $-2x^2+7x-4=0$ **Б)** $2x^2-7x-4=0$

В) $2x^2+7x+4=0$ **Г)** $-2x^2-7x+4=0$

8. Отношението $\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}$ **е равно на:**

А) $\sin 30^\circ$ **Б)** $\cos 30^\circ$ **В)** $\operatorname{tg} 30^\circ$ **Г)** $\operatorname{cotg} 30^\circ$

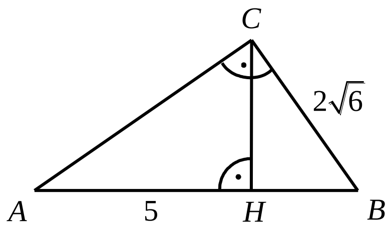
9. Върху раменете на ъгъл $O\,\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q}$ **са разположени точките** A, B, C **и** D**, такива че** $AC \,||\, BD$, $OC = 6$ **cm,** $CD = 10$ **cm и** $OB = 12$ **cm. Дължината на отсечката** AB **е равна на:**



А) $4{,}5\,\text{cm}$ **Б)** $7{,}5\,\text{cm}$

В) $8\,\text{cm}$ **Г)** $8{,}5\,\text{cm}$

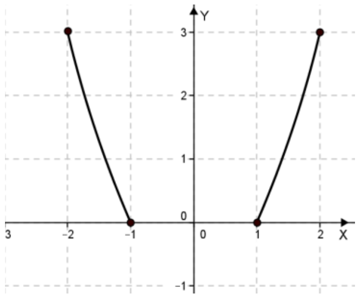
10. На чертежа е даден правоъгълният $\triangle ABC$ **с катет** $BC = 2\sqrt{6}$ **cm и височина** CH **към хипотенузата** AB**. Ако** $AH = 5$ **cm, то дължината на отсечката** BH **е:**



А) 2 cm **Б)** 3 cm

В) 4,8 cm **Г)** 8 cm

11. Дефиниционното множество на функцията, зададена с графиката си, е:



А) $x \in [-1;1]$ **Б)** $x \in [0;3]$

В) $x \in [-2;\, -1] \cup [1;2]$ **Г)** $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$

12. Общият член на числова редица е $a_n = \frac{(-1)^{n+1}\,2^{n+1} - 2^n}{(-2)^{n-1}}, n \in \mathbb{N}$**. Намерете** a_{2014}**.**

А) –6 **Б)** –2 **В)** 2 **Г)** 6

13. Числата 2, 6, 18, … , 1458 **образуват крайна геометрична прогресия. Броят на членовете на тази прогресия е:**

А) 4 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 8

14. Ако $\cos 31^\circ = a$**, то вярно е, че:**

А) $\sin 31^\circ = \frac{1}{a}$ **Б)** $\sin 59^\circ = a$ **В)** $\cos 59^\circ = 1 - a^2$ **Г)** $\sin 31^\circ = 1 - a$

15. Към реда 1, 2, 6, 8, 11, 21 **е добавено ново число. Намерете средноаритметичното на данните от новия ред, ако е известно, че двата реда имат една и съща медиана.**

А) 9 **Б)** $\frac{49}{6}$ **В)** 8 **Г)** 7

16. От група от 8 **специалисти трябва да бъде образувана комисия от председател и четирима членове. По колко начина може да стане това?**

А) 43 **Б)** 280 **В)** 560 **Г)** 6 720

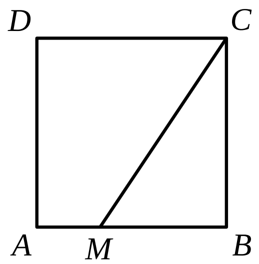
17. В $\triangle ABC$ $AC = 5$ **cm и** $BC = 7$ **cm. Ако медианата** $CM = \sqrt{21}$ **cm** $(M \in AB)$**, то периметърът на** $\triangle ABC$ **е равен на:**

А) 76 cm **Б)** 22 cm **В)** 20 cm **Г)** 18 cm

18. В $\triangle ABC$ $AC = 14\sqrt{2}$**,** $BC = 14$**,** $AB < BC$ **и** $\sphericalangle BAC = 30^\circ$**. Мярката на** $\sphericalangle ABC$ **е:**

А) 45° **Б)** 75° **В)** 105° **Г)** 135°

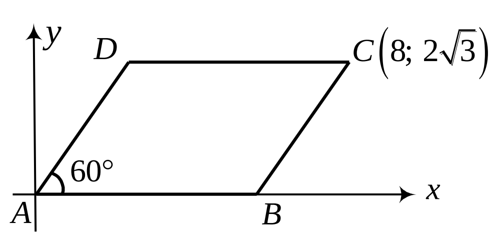
19. Върху страната AB **на квадрата** $ABCD$ **е избрана точка** M **така, че** $S_{AMCD} : S_{MBC} = 5:3$**. Отношението** $AM : MB$ **е:**



А) $1:4$ **Б)** $1:3$

В) $2:3$ **Г)** $3:4$

20. На чертежа върхът A **на успоредника** $ABCD$ **съвпада с началото на правоъгълна координатна система. Срещуположният му връх** $C(8;\ 2\sqrt{3})$ **е зададен с координати си и** $\sphericalangle BAD = 60^\circ$**. Лицето на успоредника е:**



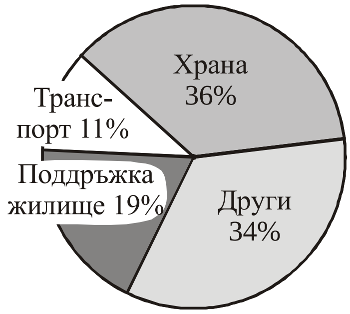
А) 32 **Б)** $16\sqrt{3}$ **В)** $12\sqrt{3}$ **Г)** 12

<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

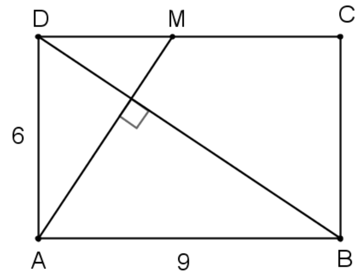
21. Намерете стойността на израза $A=\dfrac{1+\cos\left(180^\circ-\alpha\right)}{\cos\left(90^\circ-\alpha\right)}.\dfrac{1+\sin\left(90^\circ+\alpha\right)}{\sin^2\left(180^\circ-\alpha\right)}$ **за** $\alpha=-30^\circ$ **.**

22. Намерете корените на уравнението $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$

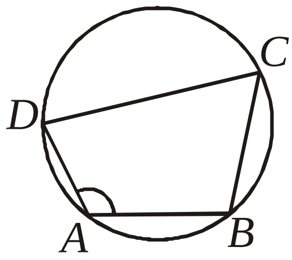
23. На диаграмата са представени данни за годишните разходи на едно семейство, което за храна е изразходвало 5760 **лв. Колко лева повече е изразходвало семейството за поддръжка на жилището си, отколкото за транспорт?**



24. Даден е правоъгълник $ABCD$ **със страни** $AB=9$ **cm и** $AD=6$ **cm. През върха** A **е построена права, перпендикулярна на** BD**, която пресича** CD **в точка** M**. Намерете дължината на отсечката** CM**.**



25. Четириъгълникът $ABCD$ **е вписан в окръжност и** $AB=BC=5$ **cm,** $CD=8$ **cm и** $\sphericalangle BAD=120^\circ$**. Намерете дължината на страната** AD **.**



<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Решете уравнението $\left(x^2-3x+1\right)^2-4\left(x^2-3x\right)=9$**.**

27. В един кашон са поставени еднакви по големина и маса жълти, сини и червени топчета. Вероятността да се извади жълто топче е $\dfrac{1}{3}$**, а синьо – съответно** $\dfrac{2}{5}$**. Ако броят на червените топчета е** 12**, то пресметнете броя на всички топчета в кашона и намерете вероятността при едновременното изваждане на три топчета те да са от трите цвята.**

28. Четириъгълникът $ABCD$ **е вписан в окръжност и описан около окръжност. Ако** $\sphericalangle DAC=\sphericalangle DBA=30^\circ$ **и** $AC=4\,\text{cm}$**, намерете радиусите на вписаните окръжности в триъгълниците** ABC **и** ACD**.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac$ $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp 1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 23 май 2014 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	**Верен отговор**	**Брой точки**
1	**В**	2
2	**Б**	2
3	**В**	2
4	**Б**	2
5	**Б**	2
6	**Б**	2
7	**А**	2
8	**Г**	2
9	**Б**	2
10	**Б**	2
11	**В**	3
12	**Г**	3
13	**В**	3
14	**Б**	3
15	**В**	3
16	**Б**	3
17	**В**	3
18	**Г**	3
19	**Б**	3
20	**В**	3
21	-2	4
22	$x_1 = 1,\ x_2 = 5$	4
23	1280 **лв.**	4
24	$CM = 5\,\text{cm}$	4
25	$AD = 3\,\text{cm}$	4
26	$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ и $x_4 = 4$	10
27	$P = \dfrac{108}{473}$	10
28	$r_{ACD} = 4 - 2\sqrt{3}\,\text{cm}$ и $r_{ABC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване:

1. Полагане $x^2-3x+1=t$ или $(x^2-3x=u)$. (2 т.)

2. Получаване на уравнението $t^2-4t-5=0$ или $(u^2-2u-8=0)$. (2 т.)

3. Намиране на корените $t_1=-1$ и $t_2=5$ или ($u_1=-2$ и $u_2=4$). (2 т.)

4. Намиране на корените $x_1=1$ и $x_2=2$ на уравнението $x^2-3x+2=0$. (2 т.)

5. Намиране на корените $x_3=-1$ и $x_4=4$ на уравнението $x^2-3x-4=0$. (2 т.)

27. Критерии за оценяване:

1. Пресмятане вероятността да се извади червено топче
$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)=1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$. (1 т.)

2. От $\frac{4}{15}n=12$ намиране на броя n на всички топчета $n=\frac{15.12}{4}=45$. (1 т.)

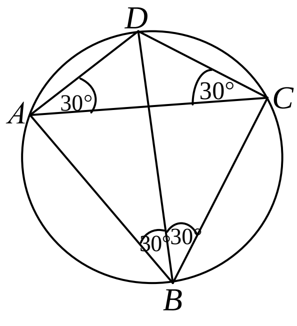
3. Броят на жълтите топчета е $\frac{1}{3}.45=15$, а броят на сините – $\frac{2}{5}.45=18$. (2 т.)

4. Извод, че броят на възможностите за изваждане по1 топче от трите цвята е
$Bl=12.15.18$. (2 т.)

5. Преброяване на възможностите за изваждане на
3 от 45 топчета $C_{45}^3=\frac{45.44.43}{1.2.3}=15.22.43$. (2 т.)

6. Намиране на търсената вероятност $P=\frac{Bl}{P_{45}^3}$, $P=\frac{15.18.12}{15.22.43}=\frac{18.6}{11.43}=\frac{108}{473}$. (2 т.)

28. Критерии за оценяване:



1. $ABCD$ е вписан в окръжност, следователно $\sphericalangle DBC=\sphericalangle DAC=30°$
и $\sphericalangle DCA=\sphericalangle DBA=30°$. (1 т.)
2. Извод, че $\triangle ACD$ е равнобедрен, като $AD=DC=c$. (1 т.)

3. $ABCD$ е описан около окръжност, следователно
$AD+BC=AB+CD$. Тогава $BC=AB=a$. (1т.)
4. $\triangle ABC$ е равностранен ($BC=AB=a$ и $\sphericalangle ABC=60°$), следователно

$BC=AB=AC=4$cm. (1 т.)

5. За намиране на $AD = DC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. (от косинусова теорема в $\triangle ADC$ или чрез синусова теорема или чрез решаване на равнобедрен триъгълник). (1 т.)

6. Изразяване на $S_{ADC} = \frac{AD^2.\sin 120^\circ}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{cm}^2$ и $p_{ACD} = AD + \frac{AC}{2} = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{cm}$. (2 т.)

7. Приравняване на полученото лице с $S = p.r$ и намиране на $r_{ACD} = 4 - 2\sqrt{3}\,\text{cm}$. (1 т.)

8. Намиране на $r_{ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{cm}$ равностранния $\triangle ABC$. (2 т.)